23-11-18

$f: A \to \mathbb{R}$

$\sup f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\} = \sup f(A)$

$\inf f(x) = \inf\{f(x) : x \in A\} = \inf f(A)$

- f άνω φραγμένη αν $\overbrace{\sup f(x)}^{\sup_A f} < +\infty$
- f κάτω φραγμένη αν $\underbrace{\inf f(x)}_{\inf_A f} > -\infty$

<u>Θεώρημα</u>

(i) Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, αύξουσα. Τότε (α) $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf f(x)$, $x \in (a,b)$ και $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f(x)$, $x \in (a,b)$, (β) $\forall x_0 \in (a,b)$ τα $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\exists$ στο $\mathbb{R}$ κ' $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

(ii) Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, φθίνουσα. Τότε (α) $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \sup f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf f(x)$, $x \in (a,b)$, (β) $\forall x_0 \in (a,b)$ τα $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\exists$ στο $\mathbb{R}$ κ' $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

* $\exists$ τα πλευρικά όρια

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι $f \to$ άνω φραγμένη. Θέτω $S = \sup f(x)$, $x \in (a,b)$ τω
$f(x_\varepsilon) > S - \varepsilon$, $\forall x > x_\varepsilon$ $(x \in (a,b))$.

$\underbrace{f(x)}_{\leq S < S+\varepsilon} \geq f(x_\varepsilon) > S - \varepsilon \Rightarrow S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to b^-} f(x) = S$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(x),\ x \in (a, x_0)$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf f(x),\ x \in (x_0, b)$

Τα όρια είναι $\neq \pm\infty$ γιατί είναι ίσα με φράγματα

Έστω $x \in (a, x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$
Ομοίως, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq f(x_0)$

<u>Θεώρημα</u>
Έστω $\xi \in \bar{\mathbb{R}}$ είναι (δεξιό ή αριστερό) σ.σ. του ΠΟ της f.
Τότε $\lim_{x \to \xi(\pm)} f(x)$ $\exists$ (στο $\mathbb{R}$) αν $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists$ περιοχή του

ξ (αντίστοιχα δεξιά ή αριστερή) A τω $\forall\ x_1, x_2 \in A \cap D(f)$
να ισχύει $f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon$

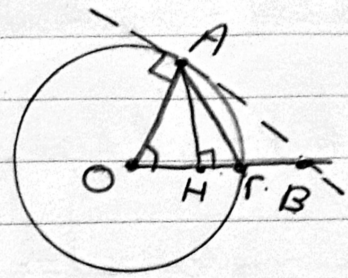
<u>Απόδειξη</u>
Έστω ότι $\xi \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to \xi} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$,

$\exists\ \delta > 0$ τω $\forall\ x \in ((\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$, $|f(x) - l| < \varepsilon/2$
Αν $x_1, x_2 \in ((\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - l +$
$l - f(x_2)| \leq |f(x_1) - l| + |f(x_2) - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
"$\Leftarrow$" Έστω $\{x_n\} \subseteq D(f)$ μια ακολουθία τω $x_n \to \xi$, $x_n \neq \xi$,
$\forall n$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall\ n \geq n_0$, $|x_n - \xi| < \delta \Rightarrow \forall\ n \geq n_0$,
$x_n \in ((\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}) \Rightarrow \forall\ m, n \geq n_0 \xrightarrow{\text{Συνθήκη Cauchy}} |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$
$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ Cauchy $\Rightarrow \exists\ l \in \mathbb{R}$, τω $f(x_n) \to l$. Έστω
$l = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$. Έστω $y_n \to \xi$, $\{y_n\} \subseteq D(f)$, $y_n \neq \xi$,

$\forall n$ παίρνω $z_n = \begin{cases} x_n, & n \text{ περιττός} \\ y_n, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \Rightarrow z_n \to \xi$
Αν $\lim_{n \to \infty} f(y_n) \neq l \Rightarrow \{f(z_n)\}$ δεν συγκλίνει, <u>ΑΤΟΠΟ</u>

© NEXT Co. GREECE

Αξιοσημείωτα όρια



1. $\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1$

$E(O\hat{A}Γ) = \frac{1}{2}(OΓ)(AH) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot ημx = \frac{ημx}{2}$

→ κυκλικός τομέας

$E(O\overset{\frown}{A}Γ) = \frac{x}{2}$

$2π \quad\quad π$

$x \quad\quad E = ;$

$E = \frac{π \cdot x}{2π} = \frac{x}{2}$

$E(O\hat{A}B) = \frac{1}{2}(OA)(AB) = \frac{1}{2} \cdot εφx$

$E(O\hat{A}Γ) < E(O\overset{\frown}{A}Γ) < E(O\hat{A}B) \Rightarrow \frac{ημx}{2} < \frac{x}{2} < \frac{εφx}{2}$

$\Rightarrow \boxed{ημx < x < εφx}, \; x > 0$

$\frac{ημx}{x} < 1$ και $\frac{εφx}{x} > 1 \Rightarrow \frac{\frac{ημx}{συνx}}{x} > 1 \Rightarrow \frac{ημx}{x} > συνx, x \neq 0$

$\Rightarrow \forall x \neq 0, \; συνx < \frac{ημx}{x} < 1$

· $\lim_{x \to 0} συνx = 1$

$συνx = \sqrt{1 - ημ^2x}$. Για $x \in (0, π/2) \to ημx > 0$ και $ημx > x$

$\Rightarrow ημ^2x < x^2 \Rightarrow \sqrt{1-ημ^2x} > \sqrt{1-x^2} \Rightarrow συνx > \sqrt{1-x^2}, x > 0, x < π/2$

$συνx, \sqrt{1-x^2}$ → άρτιες

$\Longrightarrow συνx > \sqrt{1-x^2}, \; \forall x \in (-π/2, π/2)$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} < \frac{ημx}{x} < 1 \quad \forall x \in (-π/2, π/2) \xrightarrow[\text{συναρτήσεις}]{\text{από ισοσυγκλίνουσες}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1$

2. $\lim_{x\to b} a^x$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$

Έστω $y_n \to 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} a^{y_n} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} a^x = 1$

Έστω $b\in\mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to b} a^{x-b}}_{= \frac{\lim_{x\to b} a^x}{a^b}} = \lim_{y\to 0} a^y = 1^*$

$\overset{*}{\Rightarrow} \lim_{x\to b} a^x = a^b$

3. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Έστω $\{x_n\}$, τω. $x_n \to \infty$

Ονομάζω $k_n = [x_n] \Rightarrow k_n \le x_n \le k_{n+1}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{k_{n+1}}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_{n+1}}$, $k_n \to \infty$

$\left(1+\frac{1}{k_{n+1}}\right)^{k_{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{k_{n+1}}}_{\to 1}}\right) \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}}_{\to e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)}_{\to 1}$

$\Big\{\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_{n+1}}\right)^{k_{n+1}}}_{\to e}\Big\}$: υπακολουθία της $\Big\{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\Big\}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$x = -(y+1)$, όταν $y\to\infty$, $x\to-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} =$

$\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)\right] = e\cdot 1 = e$

4. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (a\in\mathbb{R})$

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = e^a$$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Δο $\boxed{e^x \geq x+1}$ ① $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{\frac{x}{n}>-1}{\overset{\text{Για } n \text{ μεγάλο}}{\geq}} \left(1+n\cdot\frac{x}{n}\right) = 1+x \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty}(1+x)$$

$\Rightarrow e^x \geq 1+x$

$\Rightarrow e^{-x} \geq 1-x, \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \boxed{e^x \leq \frac{1}{1-x}}$ ②, $\forall x<1$

$$\xRightarrow{\text{Από ①,②}} 1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x\to 0} 1$$